Fatorial

Temos por definição de fatorial: Dado um número natural n, calcula-se seu fatorial pelo produto de n com seus antecessores, até o número 1. Ou seja, representando o fatorial de n por $n!$ (lê-se: n fatorial), temos:

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Exemplo, o fatorial de 6 é $6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$

Em particular, temos que o fatorial de 1 é ele mesmo $(1! = 1)$ e define-se o fatorial de zero $(0!)$ pelo valor 1.

Observação: Há diferença entre $(n-k)!$ e $n!-k!$. Observe o exemplo considerando $n = 6$ e $k = 4$, temos:

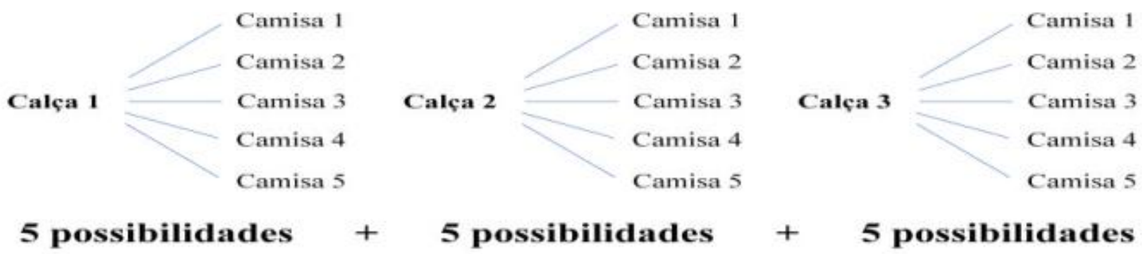
$$(6-4)! = 2! = 2 \cdot 1 = 2$$

$$6! - 4! = 720 - 24 = 696$$

Princípio Fundamental da Contagem

O Princípio Fundamental da Contagem configura-se numa ferramenta essencial em diversas áreas, utilizando a multiplicação como artifício principal.

Para a compreensão de seus processos, suponha que você precise se arrumar e tenha disponíveis três calças e cinco camisas. Quantas maneiras diferentes são possíveis? Observe o diagrama a seguir:



Você pode escolher a primeira calça e qualquer uma das cinco camisas, formando cinco possibilidades. Ou pode escolher a segunda calça e (também) qualquer uma das cinco camisas, totalizando mais cinco possibilidades. Ou, por fim, pode escolher a última calça, também totalizando mais cinco possibilidades. Portanto, para as três calças e as cinco camisas, você tem 15 possibilidades de escolha.

Em geral, pensamos:

$$3\ calças \cdot 5\ camisas = 15\ possibilidades.$$

Permutação Simples

Uma permutação simples á a ordenação dos elementos de um conjunto finito, quando seus elementos não se repetem, são distintos.

A quantidade $\boldsymbol{P_n}$ de repetições de um conjunto de *n* elementos é igual a *n!* (lê-se n fatorial). A fórmula para determinar a quantidade de permutações simples é:

$$\boldsymbol{P_n = n!}$$

Exemplos:

1 – Os diferentes modos de organizar as letras de uma palavra são chamados de anagramas. Quantos anagramas existem para a palavra PATO?

Essas são as possibilidades:

Assim como a palavra PATO tem quatro letras temos:

$$P_4 = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

Portanto há 24 permutações para a palavra PATO.

2 – Calcule o valor de P_7.

$$P_7 = 7! = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5040$$

Permutação com Repetição

Uma permutação com elementos repetidos acontece quando em um conjunto de *n* elementos, alguns são iguais.

Na fórmula para determinar o número de permutações com repetição, dividimos o fatorial do número total de *n* elementos, pelo profuto entre os fatoriais dos elementos que se repetem.

$$P_n^{(a,b,c,\ldots)} = \frac{n!}{a! \times b! \times c! \ldots}$$

Exemplos:

1 - Vamos determinar quantas permutações existem para a palavra OVO. Vejamos os anagramas:

OVO, OVO, OOV, OOV, VOO, VOO

O número de permutações simples é dada por

$$P_3 = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

Mas algumas permutações se repetem e não podemos contá-las duas vezes, por isso usamos a permutação com repetição, com a letra O repetida duas vezes.

$$P_3^{(2)} = \frac{3!}{2!} = \frac{3 \times 2 \times 1}{2 \times 1} = \frac{6}{2} = 3$$

2 – Defina o número de permutações para as letras da palavra BANANA.

$$P_6^{(3,\ 2)} = \frac{6!}{3! \times 2!} = \frac{120}{2} = 60$$

Arranjo Simples

O arranjo simples é um caso de agrupamento estudado na análise combinatória. Dado um conjunto de elementos, conhecemos como arranjos simples todos os agrupamentos ordenados que podemos formar com uma quantidade de elementos desse conjunto. O arranjo simples é bastante comum em problemas que envolvem filas, senhas, placas de automóveis, entre outros.

O arranjo simples e a combinação simples são comumente confundidos, por serem dois casos de agrupamentos, a diferença entre eles é que, no arranjo simples a **ordem dos elementos no agrupamento é relevante**, já na combinação não.

Exemplo:

1 – Dado o conjunto {A, B, C, D}, vamos construir os arranjos desses elementos tomados dois a dois.

Resolução:

Como a ordem é importante (A, B) é diferente de (B, A), portanto os agrupamentos são:

(A, B); (B, A); (A, C); (C, A); (A, D); (D, A); (B, C); (C, B); (B, D); (D, B); (C, D); (D, C).

Muitas vezes listar todos os arranjos de um conjunto se torna inviável, para isso utilizamos uma fórmula.

Fórmula de Arranjo Simples

Para resolver problemas de análise combinatória, podemos recorrer ao princípio fundamental da contagem, do qual decorre a fórmula do arranjo simples. Operações como o Fatorial de um número são bastante recorrentes para calcular a quantidade de agrupamentos. O fatorial de um número natural, nada mais é do que a multiplicação desse número por todos os seus antecessores maiores que 0.

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \ldots \times 2 \times 1$$

Exemplos:

$$3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

Para calcular o total de arranjos possíveis de um conjunto formado por *n* elementos tomados de *k* em *k*, utilizamos a seguinte fórmula:

$$A_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

n – quantidade de elementos no conjunto.

k – quantidade de elementos em cada agrupamento.

Exemplo 1:

Utilizando a situação anterior do conjunto {A, B, C, D}, vamos calcular o total de arranjos possíveis de 4 elementos tomados 2 em 2.

$$A_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$$A_{4,2} = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4!}{2!} = \frac{4\,.\,3\,.\,2!}{2!} = 12$$

Exemplo 2:

Como meio de incentivar os estudantes a realizarem uma prova diagnóstica, uma determinada escola decidiu sortear três estudantes para serem premiados, respectivamente, com: um dia no clube, uma bola de futsal e um jogo de xadrez. Sabendo que 20 estudantes foram fazer a prova e que esses três alunos seriam sorteados simultaneamente, qual é a quantidade de resultados possíveis para esse sorteio?

$$A_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$$A_{20,3} = \frac{20!}{(20-3)!} = \frac{20\,.\,19\,.\,18\,.\,17!}{17!} = 20\,.\,19\,.\,18 = 6840$$

Arranjo com Repetição

Arranjo com repetição, ou arranjo completo, são todos os agrupamentos ordenados que podem ser formados com *p* elementos de um conjunto com *n* elementos, sabendo que um mesmo elemento pode se repetir entre os *p* elementos.

Para calcular o arranjo com repetição (AR) de *n* elementos tomados *p* em *p*, utilizamos a fórmula:

$$AR_{n,p} = n^p$$

Exemplo 1:

Quantos agrupamentos ordenados podemos formar com duas letras entre as letras A, B, C, admitindo repetição?

$$AR_{n,p} = n^p$$

$$AR_{3,2} = 3^2 = 9$$

Exemplo 2:

Em um banco, a senha do cartão é composta de 4 números, que podem ser repetidos ou não, então, qual é a quantidade de senhas possíveis para esse cartão?

Resolução:

Existem 10 algarismos de 0 à 9, então *n = 10,* e serão escolhidos 4 deles, então *p = 4*.

$$AR_{10,4} = 10^4 = 10.000$$

Portanto há 10.000 senhas distintas possíveis.

Combinação

As combinações são agrupamentos que diferem entre si somente pela natureza dos elementos, diferente dos arranjos, que diferem entre si pela natureza dos elementos e pela ordem dos elementos.

De modo geral, calculamos o total de combinações possíveis de *n* elementos tomados *k* à *k*, e, para realizar este cálculo, utilizamos a seguinte fórmula:

$$C_k^n = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Exemplo: Calcule todas as combinações possíveis de *10* elementos tomados de *4* em *4*.

$$C_k^n = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

$$C_4^{10} = \frac{10!}{4!\,(10-4)!} = \frac{10!}{4!\,6!} = \frac{10\,.\,9\,.\,8\,.\,7\,.\,6!}{4!\,6!} = \frac{5040}{24} = 210$$

Combinação com Repetição

A combinação com repetição, conhecida também como combinação completa, é um tipo de agrupamento estudado na análise combinatória, que, por sua vez, é a área de Matemática responsável por desenvolver técnicas de contagem para várias situações diferentes de agrupamentos. Dado um conjunto com *n* elementos, conhecemos como combinação com repetição todos os subconjuntos formados com *k* elementos entre os *n* elementos do conjunto.

A diferença entre a combinação simples e a combinação completa é que, na simples, os elementos são necessariamente distintos. Para encontrar a quantidade de combinações com repetição, existe uma fórmula específica.

Dado um conjunto com *n* elementos tomados de k a k, para calcular a quantidade de combinações com repetição, utilizamos a seguinte fórmula:

$$CR_{n,k} = \frac{(n+k-1)!}{k!\,(n-1)!}$$

Exemplos:

1 – Uma lanchonete oferece 4 tipos de salgados. Qual é o número de maneiras que um cliente pode escolher 6 salgados?

$$CR_{n,k} = \frac{(n+k-1)!}{k!\,(n-1)!}$$

$$CR_{4,6} = \frac{(4+6-1)!}{6!\,(4-1)!} = \frac{9!}{6!\,3!} = \frac{9\,.\,8\,.\,7\,.\,6!}{6!\;\;3\,.\,2\,.\,1} = 84$$

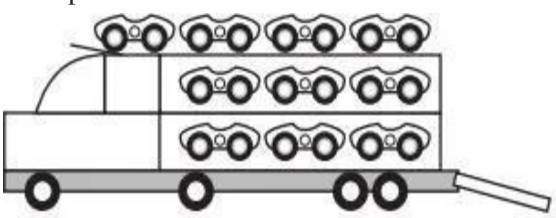
2 – Considere o conjunto {A, B, C, D}, calcule a combinação com repetição desses termos tomados de 2 a 2.

$$CR_{n,k} = \frac{(n+k-1)!}{k!\,(n-1)!}$$

$CR_{4,2} = \frac{(4+2-1)!}{2!(4-1)!} = \frac{5!}{2!3!} = \frac{5\,.\,4\,.\,3!}{2!3!} = 10$

Exercícios

1- (ENEM 2017) Um brinquedo infantil caminhão-cegonha é formado por uma carreta e dez carrinhos nela transportados, conforme a figura.
No setor de produção da empresa que fabrica esse brinquedo, é feita a pintura de todos os carrinhos para que o aspecto do brinquedo fique mais atraente. São utilizadas as cores amarelo, branco, laranja e verde, e cada carrinho é pintado apenas com uma cor. O



caminhão-cegonha tem uma cor fixa. A empresa determinou que em todo caminhão-cegonha deve haver pelo menos um carrinho de cada uma das quatro cores disponíveis. Mudança de posição dos carrinhos no caminhão-cegonha não gera um novo modelo do brinquedo.
Com base nessas informações, quais são os modelos distintos do brinquedo caminhão-cegonha que essa empresa poderá produzir?

A) $C_{6,4}$

B) $C_{9,3}$

C) $C_{10,4}$

D) 6^4

E) 4^6

2- Uma loja oferece 3 sabores possíveis de sucos, são eles: laranja, limão e abacaxi. Sabendo disso, o número de maneiras distintas que um cliente pode pedir 4 sucos é:

A) 12

B) 15

C) 18

D) 20

E) 22

3- A época que mais aquece o mercado de vendas de chocolate é a Páscoa, pensando nisso, uma fábrica de chocolate, no interior de Goiás, decidiu inovar na produção de chocolate criando sabores de ovos de Páscoa, com frutas do Cerrado como ingredientes. Os sabores criados foram chocolate meio amargo com bacupari-do-cerrado, chocolate ao leite com pera-do-campo, chocolate branco com muricy, chocolate branco com baru, e chocolate amargo com buriti. Um cliente decidiu ir até essa loja para comprar 1 ovo de Páscoa para cada um dos seus 3 irmãos. Sabendo disso, o número de maneiras distintas que esse cliente pode escolher esses ovos de Páscoa é:

A) 20

B) 22

C) 25

D) 32

E) 35

4- Júlia deseja viajar e levar 5 pares de sapatos, sabendo que ela possui em seu guarda- roupa 12 pares, de quantas maneiras diferentes Júlia poderá escolher 5 pares de sapatos para a sua viagem?

5- Em época de eleição para o grêmio estudantil do colégio, tiveram 12 candidatos aos cargos de presidente, vice-presidente e secretário. De quantos modos diferentes estes candidatos poderão ocupar as vagas deste grêmio?

6- Ao preencher um cartão da loteria esportiva, André optou pelas seguintes marcações: 4 colunas um, 6 colunas do meio e 3 colunas dois. De quantas maneiras distintas André poderá marcar os cartões?

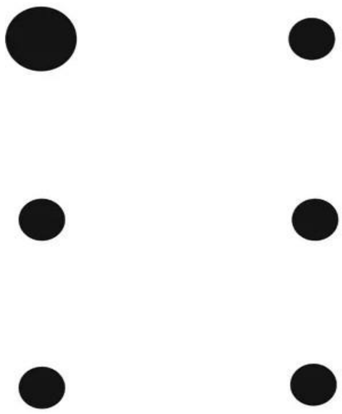
7- Em uma prova composta de 20 questões envolvendo V ou F, de quantas maneiras distintas teremos doze respostas V e oito respostas F?

8- Fernando é um cara que gosta de música. Por isso, pensa em seguir carreira de artista, mas antes precisa de experiência. Ele gosta de muitos instrumentos, 7 chamam a sua atenção, porém ele não quer se sobrecarregar. Fernando decide começar com três. Quantas combinações de sons ele pode praticar?

9- (Enem 2005) A escrita Braille para cegos é um sistema de símbolos no qual cada caráter é um conjunto de 6 pontos dispostos em forma retangular, dos quais pelo menos um se destaca em relação aos demais.

Por exemplo, a letra A é representada por:

O número total de caracteres que podem ser representados no sistema Braille é:



A) 12
B) 31
C) 36
D) 63
E) 720