Funções

Função é uma **regra** que relaciona **cada elemento** de um conjunto (**representado pela variável** x) a **um único elemento** de outro conjunto (**representado pela variável** y).

<u>Definição</u>: Dados dois conjuntos **A** e **B**, não vazios, uma <u>relação</u> de **A** em **B** é <u>função</u> se cada elemento **x** de **A** possui somente um <u>único</u> correspondente em **y**.

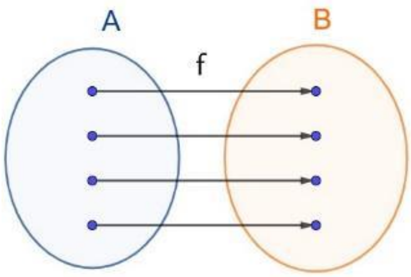
Esta relação deve atender duas condições:

★ <u>Todo</u> elemento **x** de **A** deve ter correspondente **y** em B

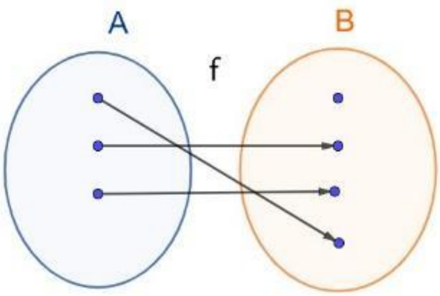
★ <u>Cada</u> elemento **x** de **A** deve ter <u>um</u> <u>único</u> correspondente **y** em B

Exemplos

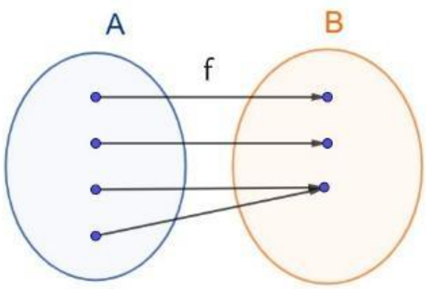
Exemplo 1: O diagrama a seguir descreve uma função, pois todo elemento do conjunto A possui um correspondente em B.



Exemplo 2: Esse exemplo também é uma função. Por mais que exista um elemento no conjunto B que não é correspondente de nenhum elemento do conjunto A, esse fato não contradiz a definição, pois todos os elementos do A possuem um único correspondente em B.



Exemplo 3: Veja mais um exemplo de relação entre dois conjuntos que é uma função:



Por mais que exista um elemento no conjunto B que é correspondente de dois elementos no conjunto A, essa relação também é uma função, pois as restrições são para o conjunto A, ou seja, um elemento de A não pode ter dois correspondentes em B, mas um elemento de B pode ser correspondente de dois elementos em A.

Domínio, Contradomínio e Imagem de uma função

O domínio, o contradomínio e a imagem de uma função são conjuntos importantes para definirmos o que é função e compreendermos melhor o seu comportamento. Uma função é uma relação entre dois conjuntos domínio e contradomínio em que, para cada elemento do domínio, existirá um único correspondente no contradomínio, esse correspondente é conhecido como imagem. Dada a função $y = f(x)$ que relaciona os elementos do conjunto A aos elementos do conjunto B, podemos definir:

O **conjunto A** é conhecido como **domínio**. Esse nome é escolhido para esse conjunto devido ao papel dos seus elementos na **função**. Lembre-se de que o conjunto A é que determina a variável independente. Portanto, os elementos do conjunto A possuem o "domínio" sobre os resultados da função, uma vez que os resultados de y obtidos dependem do valor x escolhido.

Exemplo – dada a função:

$$f: N \rightarrow Z$$

$$y = 2x$$

O **conjunto** dos números naturais é o **domínio**, portanto, os números que poderão ser relacionados estão no conjunto: $N = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots\}$.

O **conjunto B** é conhecido como **contradomínio**. Esse nome é escolhido pelo fato de que nem todos os elementos do conjunto B precisam ser usados para que a **função** seja válida. Além disso, esse nome remete à dependência que existe entre os conjuntos A e B. O **contradomínio** é o **conjunto** em que encontraremos todos os números que podem ser relacionados aos elementos do **domínio** por meio da função f. Tomando novamente o exemplo anterior:

$$f: N \rightarrow Z$$

$$y = 2x$$

O contradomínio é o conjunto formado por todos os números inteiros. Note que alguns números inteiros nunca poderão ser resultados de uma **multiplicação** de um número natural por 2, como o número 7. Assim, embora o número 7 pertença ao **contradomínio**, ele não pode ser relacionado a nenhum número no **domínio**. Já o subconjunto do **contradomínio,** formado por todos os seus elementos que se relacionam a algum elemento do **domínio,** é denominado de **imagem**. Assim, na função anterior:

$$f: N \rightarrow Z$$

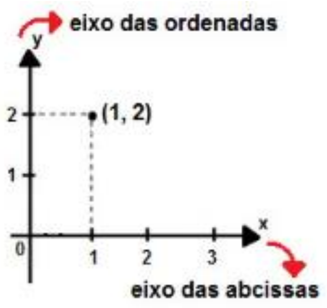
$$y = 2x$$

Embora o conjunto de todos os números inteiros seja o **contradomínio** dessa **função**, apenas os números pares serão resultados de algum elemento do **domínio** aplicado na regra da função. Portanto, o conjunto imagem dessa função é o conjunto dos números pares.

Gráfico de Funções.

Quando trabalhamos com funções, a construção de gráficos é de extrema importância. Podemos dizer que assim como vemos nossa imagem refletida no espelho, o gráfico de uma função é o seu reflexo. Através do gráfico, podemos definir de que tipo é a função mesmo sem saber qual é a sua lei de formação. Isso porque cada função tem sua representação gráfica particular. Independente da função trabalhada, é fundamental conhecer algumas definições:

Plano Cartesiano: é o ambiente onde o gráfico será construído. Ele é estabelecido pelo encontro dos eixos cartesianos x e y, conhecidos como eixo das abscissas e eixo das ordenadas, respectivamente. Cada ponto do gráfico é conhecido como par ordenado, pois ele é formado pelo encontro de um valor das abscissas com um valor das ordenadas. A linha que une os pares ordenados é conhecida como curva da função.



Representação do ponto de coordenadas (1,2) no plano cartesiano

Raiz de uma função (seja qual for o grau) é todo número que, ao ser substituído na equação (no lugar de "x"), tem a capacidade de zerar a sentença. Graficamente falando, é o ponto onde a reta toca no eixo x (conhecido também como eixo da abscissa).
Como achar a raiz de um polinômio de grau 1?
Basta você igualar a equação a zero e calcular o "x" correspondente. Veja:

$$y = 10x + 5$$
$$10x + 5 = 0$$
$$10x = -5$$
$$x = -\frac{1}{2}$$

Logo, o número $\frac{1}{2}$ é a raiz da função $y = 10x + 5$.

1. Operações com funções

Dadas duas funções numéricas f e g, com o mesmo domínio D e o mesmo Conjunto de Chegada $\mathbb{Q}$, designa-se por:

- **Soma das funções f e g à função:**

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \text{, para qualquer } x \in D$$

- **Diferença das funções f e g à função:**

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) \text{, para qualquer } x \in D$$

- **Produto das funções f e g à função:**

$$(f \times g)(x) = f(x) \times g(x) \text{, para qualquer } x \in D$$

- **Divisão das funções f e g:**

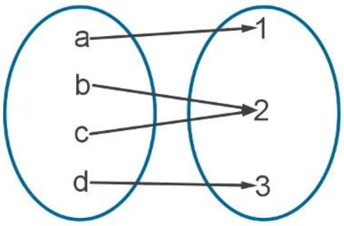
$$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, para\ qualquer\ x \in D$$

2. Tipos de funções

As funções recebem classificações de acordo com suas propriedades. A seguir mostraremos os principais tipos de função.

<u>Função sobrejetora</u>

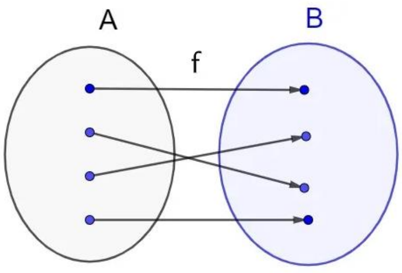
Dizemos que uma função é **sobrejetora** se todos os elementos do contradomínio pertencem ao conjunto da imagem, isto é, se todos os elementos “recebem uma seta vinda do domínio, ou, simplesmente, se o conjunto da imagem e do contradomínio são iguais.” Um mesmo elemento do contradomínio pode receber uma correspondência de mais de um elemento do domínio.



Note que essa função é sobrejetora e que não “sobram” elementos em seu contradomínio, e essa é outra característica das funções sobrejetoras.

Função Injetora

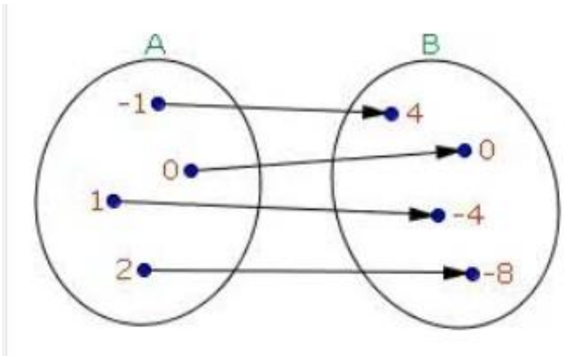
Uma função é dita **injetora** se cada elemento do domínio possuir uma única e distinta imagem, isto é, um elemento do conjunto da imagem não pode corresponder a dois elementos do domínio.



Função injetora

Função Bijetora

Uma **função é bijetora se ela for sobrejetora e injetora simultaneamente**, isto é, se todos os elementos do contradomínio pertencem ao conjunto da imagem e um elemento do contradomínio corresponde a um único elemento do domínio.



Função Simples

Uma função é dita simples se ela não é injetora nem sobrejetora.

Função inversa

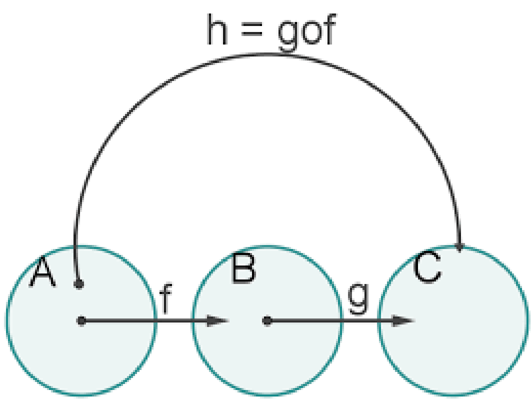
A função **inversa**, como o nome já sugere, é a função $f(x)^{-1}$, que faz exatamente o inverso da função $f(x)$. Para que uma função admita uma inversa, ela precisa ser bijetora, ou seja, injetora e sobrejetora ao mesmo tempo. A lei de formação de uma função inversa faz o contrário do que a função $f(x)$ faz. Por exemplo, se a função pega um valor do domínio e soma 2, a função inversa, ao invés de somar, subtrai 2. Encontrar a lei de formação da função inversa nem sempre é uma tarefa fácil, sendo necessário inverter as incógnitas x e y, bem como isolar y na nova equação.

Função composta

Dadas as funções $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow C$, a função **composta** de g com f é a função $h(x) = g(f(x))$, que também pode ser representada como $(gof)(x)$ – que é lida como "g bola f de x". Para utilizar a função h, podemos aplicar a função f no ponto x, descobrir qual é o valor do contradomínio relacionado a ele e aplicar a função g sobre esse valor. Fazendo isso, obteremos um ponto do contradomínio de g cujos pontos de seu domínio também pertençam ao contradomínio da f. Sendo assim, a função h, seu domínio e contradomínio ficam definidos como:

$$h: A \rightarrow C$$

Isso porque, pelo fato de ser igual à composta de g com f, a função h relaciona cada elemento do domínio da função f com um único elemento do contradomínio da função g.
O diagrama a seguir mostra o comportamento das funções f, g e h. Nesse diagrama, observe que a função f, representada pela primeira flecha, relaciona elementos do conjunto A a elementos do conjunto B:



A segunda flecha representa a função g, que relaciona elementos do conjunto B a elementos do conjunto C. Para relacionar elementos do conjunto A a elementos do conjunto B, existem dois caminhos: utilizar as duas funções, uma a uma, ou

construir a função composta gof, que, como mostra o diagrama, relaciona diretamente elementos do conjunto A a elementos do conjunto C.
Exemplo: dadas as funções $f(x) = 2x^3$ e $g(x) = 2x + 3x^2$, todas com domínio e contradomínio igual ao conjunto dos números reais, teremos:

$$gof(x) = 2(2x^3) + 3(2x^3)^2$$
$$gof(x) = 4x^3 + 3 \cdot 4x^6$$
$$gof(x) = 4x^3 + 12x^6$$
$$fog(x) = 2(2x + 3x^2)^3$$

Função modular

Função **modular** é a função (lei ou regra) que associa elementos de um conjunto em módulos. O módulo é representado entre barras e seus números são sempre positivos, ou seja, mesmo que um módulo seja negativo seu número será positivo:

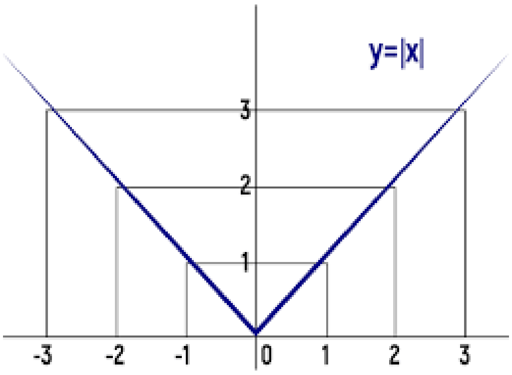
1) $|x| = x\ se\ x \geq 0$, ou seja,

$$4 + |5| = 4 + 5 = 9$$
$$|5| - 4 = 5 - 4 = 1$$

2) $|-x| = x$ se $x < 0$, ou seja,

$$|-2|\,.\,|-6| = -(-2)\,.-(-6) = 2.6 = 12$$
$$|-8 + 6| = |-2| = 2$$

Função modular é a função $f: A \rightarrow B$, em que a lei de formação contém, pelo menos, uma variável dentro do módulo. O módulo ou valor absoluto de um número é representado por |n|, que gera como resultado o valor absoluto, ou seja, um número real positivo. Existem diferentes tipos de funções modulares, a depender do tipo de equação que se encontra dentro do módulo, podendo ser uma equação do 1º grau, do 2º grau, entre outros tipos de expressões algébricas. Encontramos o valor numérico de uma função quando substituímos a variável pelo valor desejado, então o valor numérico da função quando x = k é igual a f(k). o gráfico da função quando $y = |x|$ é:



Função afim

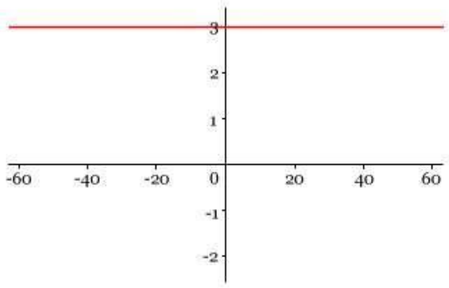
A função **afim**, definida pela formação $f(x) = ax + b$, é classificada como função de primeiro grau, sendo os coeficientes a e b números reais e diferentes de zero. Como o grau de uma função é decidido pela maior potência da variável independente (x), no caso da função afim o expoente também é igual a 1 x^1. Nesse tipo de função polinomial de primeiro grau o valor de "a" é chamado de taxa de variação ou coeficiente angular, e o "b" de valor inicial ou coeficiente linear. A seguir vamos ver alguns exemplos de funções afim.

$$f(x) = 2x + 7$$
$$a = 2 \; e \; b = 7$$
$$y = -4x$$
$$a = -4 \; e \; b = 0$$

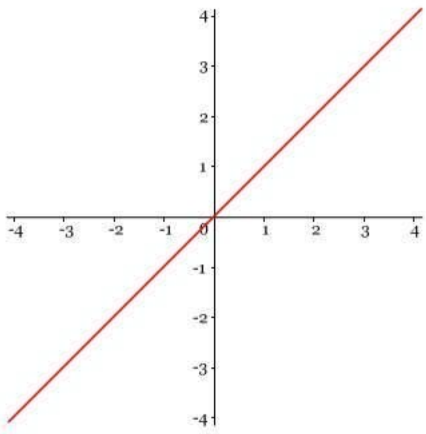
Existem três classificações da função afim: **linear, identidade e constante**. Entenda as características de cada uma delas.

<u>Constante:</u> Uma função afim é considerada como constante se f(x) = b, isto é, quando o coeficiente angular é igual a zero. Nessa categoria o gráfico apresentará uma reta paralela ao eixo da abscissa (x), cortando o y no ponto b. Dado $f(x) = 2x + 3$, o gráfico será interceptado no eixo 3, pois:

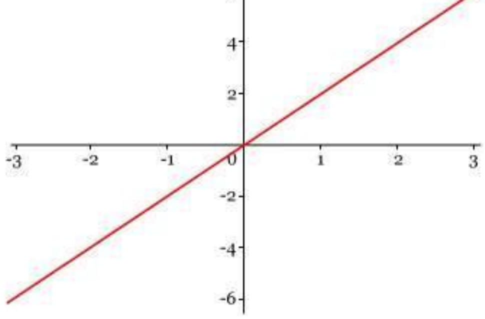
$$f(x) = 2.0 + 3$$
$$f(x) = 3$$



Identidade: Uma função afim se enquadra como identidade se f(x) = x, ou seja, quando o coeficiente angular é igual a 1 e o coeficiente linear igual a zero (a = 1; b = 0). Nessas situações a reta passará pela origem (0,0). A semirreta que separa o ângulo em dois de mesmo tamanho é chamada de bissetriz. Ela também é identificada como reta dos quadrantes ímpares (1° e 3°).



Função Linear: Uma função afim é considerada como linear se $f(x) = ax$, sendo o coeficiente angular diferente de zero e o coeficiente linear igual a zero (b = 0). Nesses casos a reta passará pela origem (0,0). As funções $f(x) = 2x$; $f(x) = -6x$ são lineares. No gráfico abaixo temos a representação do primeiro exemplo:

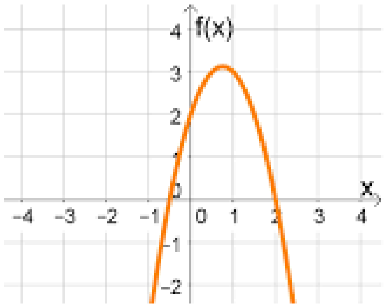


Função quadrática

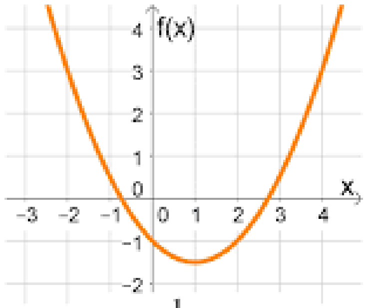
Uma função f é chamada de função do 2º grau ou função quadrática quando existir $a, b, c \in R$ com a ≠ 0, de maneira que $f(x) = ax^2 + bx + c$, para todo $x \in R$. A seguir temos alguns exemplos dessa função.

$$f(x) = 3x^2 + 3x$$
$$a = 3\,;\ b = 3\,;\ c = 0.$$
$$f(x) = x^2 - x$$
$$a = 1;\ b = -1;\ c = 0.$$

O gráfico da função do 2º grau é sempre uma parábola.



$f(x) = -2x^2 + 3x + 2$



$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - 1$

A **fórmula de Bhaskara** é utilizada para resolver as equações do 2º grau, ou seja, para encontrar as raízes da equação, tendo por base apenas os valores dos coeficientes a, b e c. Como a imagem abaixo sugere, para encontrarmos as raízes de uma equação do segundo grau, basta substituirmos os valores numéricos dos coeficientes a, b e c na fórmula de Bhaskara, realizar as operações propostas por ela, e ao fim, teremos os valores desejados.

As raízes da equação do 2º grau costumam ser chamadas de x_1 e x_2, ou então, de x' e x'' e são sempre duas. Por isso, temos o sinal ± na fórmula de Bhaskara. Para encontrar o valor da raiz x_1 ou x', deve-se utilizar um dos sinais, por exemplo, o sinal positivo. Para encontrar o valor da raiz x_2 ou x'', basta utilizar o outro sinal, neste exemplo, o sinal negativo.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_1 \text{ ou } x' = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad x_2 \text{ ou } x'' = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

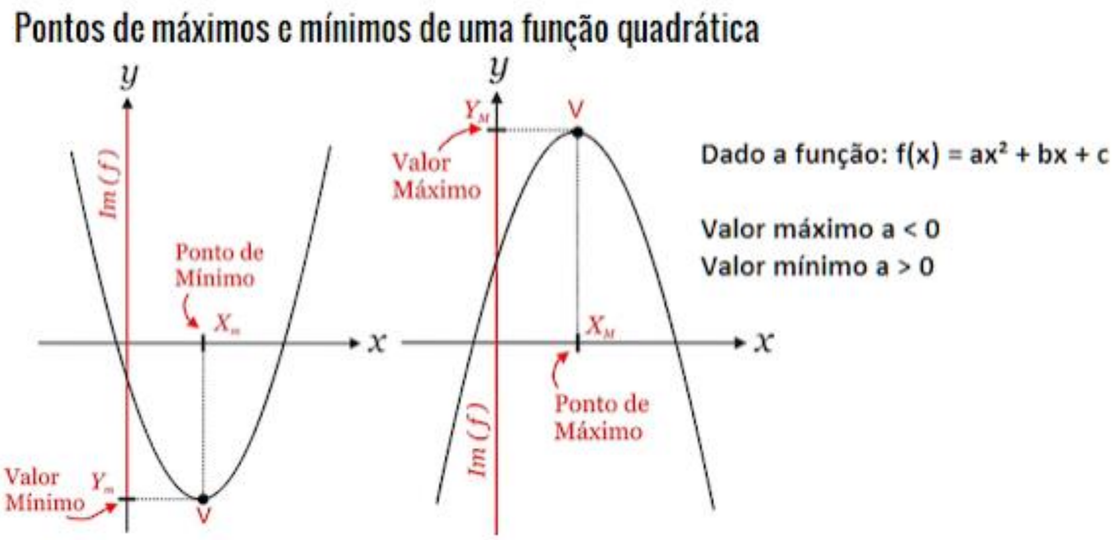
<u>Máximo ou mínimo?</u>

Para determinar se o ponto extremo da parábola (ou vértice) será máximo ou mínimo, devemos avaliar a concavidade da parábola. Para isso, vamos considerar uma equação do segundo grau do formato $ax^2 + bx + c = 0$. Para este modelo de equação quadrática, a concavidade da parábola será definida pelo termo que acompanha o valor quadrado da função (a). Assim, teremos duas situações:

- $\boldsymbol{a > 0}$: Para as situações em que $a > 0$, a concavidade da função estará voltada para cima, e o ponto extremo será o mínimo da função.

- $\boldsymbol{a < 0}$: Já para as situações em que $a < 0$, a concavidade da função estará voltada para baixo, e o ponto extremo será o máximo da função

Depois de entendermos qual será o ponto da função e as situações em que estes pontos ocorrerão, é hora de aprendermos a calcular estes pontos.

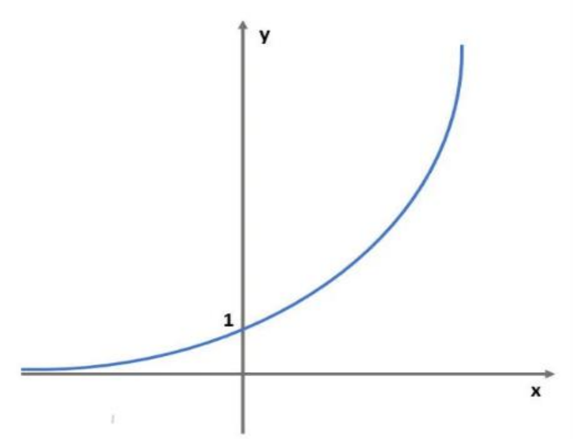


O vértice é calculado por $V(x_v, y_v)$.

$$X_V = \frac{-b}{2a} \qquad\qquad Y_V = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a}$$

Função exponencial

Função Exponencial é aquela que a variável está no expoente e cuja base é sempre maior que zero e diferente de um. Essas restrições são necessárias, pois 1 elevado a qualquer número resulta em 1. Assim, em vez de exponencial, estaríamos diante de uma função constante. Além disso, a base não pode ser negativa, nem igual a zero, pois para alguns expoentes a função não estaria definida. $f(x) = a^x$, sendo $a > 0$ e $a \neq 0$.



Exercícios

1) Seja a função $f : D \rightarrow R$ dada pela lei de formação $f(x) = 5x + 2$, de domínio
$D = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$. Determine o conjunto imagem dessa função.

2) Dada a função $f : R \rightarrow R$ por $f(x) = x^2 + 2x$, determine o valor de $f(2) + f(3) - f(1)$.

3) **(Fuvest–SP)** Uma função f de variável real satisfaz a condição $f(x + 1) = f(x) + f(1)$, qualquer que seja o valor da variável x. Sabendo que $f(2) = 1$, determine o valor de $f(5)$.

4) Em uma indústria metalúrgica o custo de produção de uma peça automotiva corresponde a um custo fixo mensal de R$ 5 000,00 acrescido de um custo variável de R$ 55,00 por unidade produzida mais 25% de impostos sobre o custo variável. Considerando que o preço de venda dessa peça pela indústria aos comerciantes é de R$ 102,00, determine:

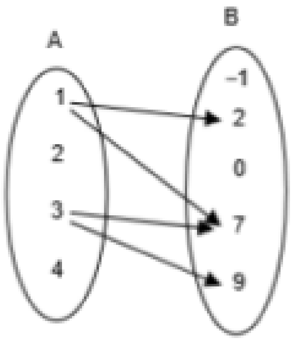
   a) a função custo da produção de x peças.

   b) a função receita referente a venda de x peças.

   c) a função lucro na venda de x peças.

   d) o lucro obtido com a venda de 500 unidades.

5) Observe o diagrama abaixo, que ilustra uma relação S do conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$ no conjunto $B = \{-1, 2, 0, 7, 9\}$. Marque a única afirmativa CORRETA:



a) $D(S) = \{2, 4\}$ e $Im(S) = \{-1, 0\}$

b) $D(S) = \{2, 4\}$ e $Im(S) = \{2, 7, 9\}$

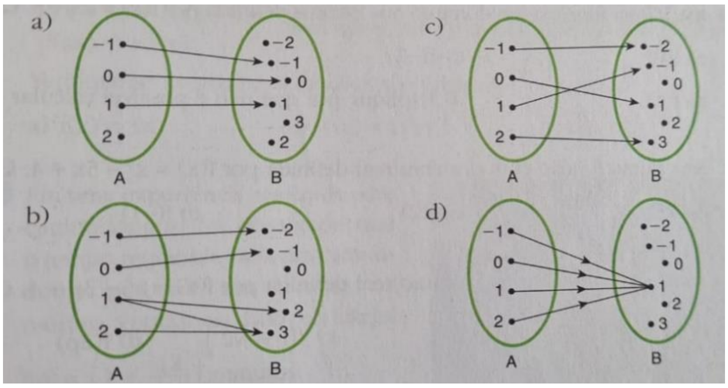
c) $D(S) = \{1, 3\}$ e $Im(S) = \{2, 7, 9\}$

d) $D(S) = \{1, 3\}$ e $Im(S) = \{-1, 0\}$

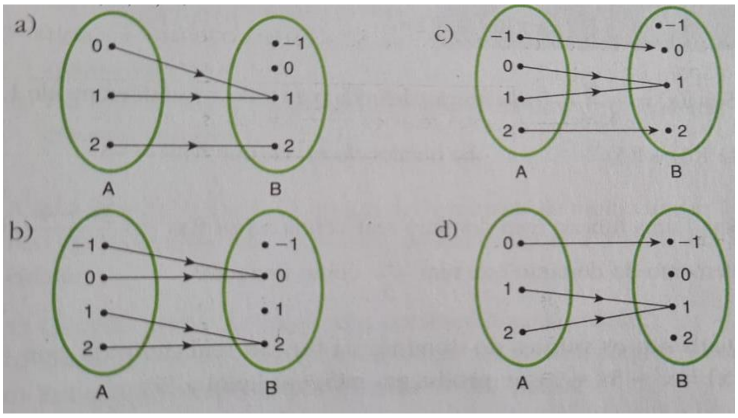
e) $D(S) = A$ e $Im(S) = B$

6) A relação S representada na questão 5, é uma função? Justifique sua resposta.

7) Responda se cada um dos esquemas abaixo representa ou não uma função do conjunto $A = \{-1,0,1,2\}$ em $B = \{-2,-1,0,1,2,3\}$. Justifique suas escolhas.



8) Quais dos esquemas abaixo representa uma função de $A = \{0, 1, 2\}$ em $B = \{-1,0,1,2\}$? Por quê?



9) Considere os conjuntos $A = \{-1\ 0, 1, 2\}$ e $B = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$. Para cada item faça um diagrama e verifique se representa uma função.

a. $f(x) = 2x$
b. $f(x) = x^2$
c. $f(x) = 2x + 1$

10) Escreva de forma algébrica cada uma das seguintes funções reais.

a. f associa a cada número real o seu dobro.
b. g associa a cada número real o seu quadrado.
c. h associa a cada número real o seu triplo.

11) Determinar em cada caso a imagem da função $f: R \rightarrow R$ cuja lei de correspondência é $f(x) = x^2\ 1$

a) $f(0)$

b) $f(1)$

c) $f(\sqrt{2})$

d) $f(-4)$

e) $f(-1)$

f) $f(-\sqrt{2})$

12) Determinar o valor do domínio da função $f: R \rightarrow R$, cuja lei de correspondência é dada por $f(x) = x^3 + 4$ e a imagem é 12.

"Aquilo que você não tenta, é a única coisa impossível".