Progressão Aritmética (P.A.):

Definição: O termo "**progressão aritmética**" remete a um desenvolvimento gradual de um processo ou uma sucessão. Em matemática, dizemos que esta sucessão é uma sequência.
Podemos exemplificar algumas sequências conhecidas:

- Sequência das eleições para o Executivo a partir de 1994: (1994, 1998, 2002, 2006, 2010, 2014);
- Sequência das edições da Copa do Mundo a partir de 1990: (1990, 1994, ..., 2014, 2018);
- Sequência dos números naturais: (0, 1, 2, 3, 4, 5, ...)

Note que em todos os exemplos acima, as sequências são definidas por uma ordem em seus elementos (também chamados de termos). Definimos o tamanho de uma sequência pelo número de termos que ela possui, o que nos traz a possibilidade de que ela seja infinita ou finita.

Em uma sequência, finita ou infinita, nomeamos os termos em função de sua posição, ou seja, nos exemplos acima temos que o 1º termo de cada um são: 1994, 1990 e 0. O segundo termo: 1998, 1994 e 1. Assim, determinamos que um termo de uma sequência em função de sua posição pode ser chamado de n, onde n representa a sua posição (1ª, 2ª, 3ª, ..., nª). Dizemos também que o primeiro e o último termo de uma sequência finita (e) são chamados de extremos de uma sequência. Podemos então representá-la de uma forma genérica:

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \dots\ a_n$$

A **progressão aritmética** (**P.A.**) é uma sequência numérica em que o próximo elemento da sequência é o número anterior somando a uma constante ***r***.
Este ***r*** é chamado de razão da **P.A.** Para sabermos qual a razão de uma **P.A.** basta subtrair um elemento qualquer pelo seu antecessor.
Exemplos:
Considere as seguintes sequências:

- $(\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}, \mathbf{5}, \mathbf{6}, \dots)$ é uma P.A. infinita crescente, razão desta P.A. é 1 pois 3 – 2 = 1.
- $(\mathbf{1}, \mathbf{4}, \mathbf{7}, \mathbf{10}, \mathbf{13}, \mathbf{16}, \mathbf{19}, \dots)$ é uma P. A. infinita crescente, razão desta P.A. é 3 pois 7 – 4 = 3.
- $(\mathbf{3}, \mathbf{3}, \mathbf{3}, \mathbf{3}, \dots)$ é uma P.A. infinita constante, razão desta P.A. é 0 pois 3 – 3 = 0.
- $(\mathbf{10}, \mathbf{5}, \mathbf{0}, \dots)$ é uma P.A. infinita decrescente, razão desta P.A. é -5 pois 5 – 10 = -5.

Tipos de progressões aritméticas (P.A.):

- **Crescente**: É toda P.A. em que o próximo termo, a partir do segundo, é sempre maior que o antecessor, ou seja, com **r > 0**.

  Exemplo: $(\mathbf{1}, \mathbf{3}, \mathbf{5}, \mathbf{7}, \mathbf{9}, \mathbf{11}, \dots)$ é uma P.A. com razão **r = 2**.

- **Decrescente**: É toda P.A. em que o próximo termo, a partir do segundo, é sempre menor que o seu antecessor, ou seja, **r < 0**.

  Exemplo: $(\mathbf{7}, \mathbf{5}, \mathbf{3}, \mathbf{1}, -\mathbf{1}, -\mathbf{3}, \dots)$ é uma P.A. com **r = -2**.

- **Constante**: toda P.A. em que seus termos são iguais, o seja, com **r = 0**.

  Exemplo: $(\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \dots)$ é uma P.A. com **r = 0**.

Termo Geral de uma Progressão Aritmética:

Podemos encontrar qualquer termo de uma P.A. ou o total de termos da seguinte forma:
Seja a (**P.A.)** com razão ***r*** a seguir:

$$(a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n, \dots)$$

A partir da **P.A.** acima, sabemos que:

- $a_1 = a_1$
- $a_2 = a_1 + r$
- $a_3 = a_2 + r$
- $a_4 = a_3 + r$
- $a_5 = a_4 + r$

  .

  .

  .
- $a_n = a_{n-1} + r$

Se somarmos as igualdades acima, membro a membro, teremos:

$$(a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1}) + (a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots a_{n-1}) + r + r + r + \dots + r\ ((n-1)\ vezes)$$

Com isso chegaremos a seguinte fórmula, após simplificarmos os termos:

$$\boldsymbol{a_n = a_1 + (n-1)r}$$

Onde:

- $\boldsymbol{a_n}$**:** é o termo geral;
- $\boldsymbol{a_1}$**:** é o primeiro termo da P.A.;
- $\boldsymbol{n}$**:** é o número de termos ou o total de termos;
- $\boldsymbol{r}$**:** é a razão.

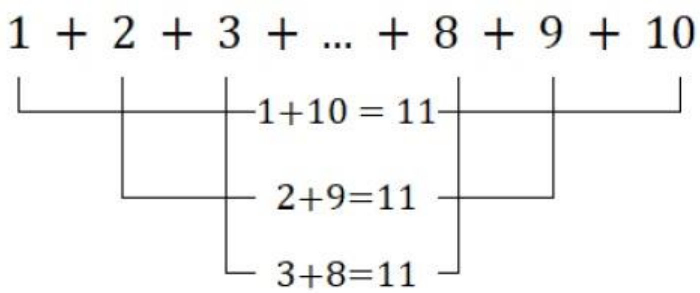
A fórmula acima é conhecida como a fórmula do termo geral da **P.A.**, com ela podemos encontrar qualquer termo em uma **P.A.**, desde que conheçamos $\mathbf{a_1}$, $\boldsymbol{n}$ e $\boldsymbol{r}$.

Soma dos termos de uma progressão aritmética finita:

Tomemos a sequência dos números naturais de 1 a 10: $(1, 2, 3, 4, \dots, 8, 9, 10)$ e representaremos a soma de 10 termos da P.A. por S_{10}. Então escrevemos:

$$S_{10} = 1 + 2 + 3 + \dots + 8 + 9 + 10$$

O matemático Carl Friedrich Gauss (1777-1855) notou que em toda P.A. finita existe uma relação em que ao escolhermos um termo qualquer em uma sequência e somarmos ao seu extremo simétrico (ou o seu termo equidistante) obtemos sempre o mesmo valor, veja abaixo:



Gauss utilizou este procedimento para obter a fórmula da soma dos termos da P.A. No exemplo acima, notem que teremos, no total, $n/2$ parcelas de valor $(n + 1)$, ou seja $(5\ x\ 11\ =\ 55)$. Esta relação vale para a soma dos termos de uma P.A. Gauss constatou então que:

$$S_n\ =\ a_1\ +\ a_2\ +\ a_3\ +\ a_4\ +\ a_5 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} +\ a_n$$

$$S_n\ =\ (a_1 + a_n)\ +\ (a_1 + a_n) + \ldots + (a_1 + a_n)$$

Como existem $n/2$ parcelas iguais a $(a_1 + a_n)$, então a fórmula é dada por:

$$Sn = \frac{(a_1\ + a_n)n}{2}$$

Esta fórmula serve para qualquer P.A. de qualquer razão, pois independente do valor dos seus termos as propriedades das somas de suas parcelas também são válidas.

Exemplos:

(PUC-RIO 2009) Temos uma progressão aritmética de 20 termos onde o 1º termo é igual a 5. A soma de todos os termos dessa progressão aritmética é 480. O décimo termo é igual a:

a) 20
b) 21
c) 22
d) 23
e) 24

Resolução:
$a_1 = 5$
$n = 20$
$S_{20} = 480$

$$Sn = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

$$480 = \frac{(5 + a_n)20}{2}$$

$$480 = \frac{(100 + 20a_n)}{2}$$

$$2 \times 480 = 100 + 20a_n$$

$$960 = 100 + 20a_n$$

$$960 - 100 = 20a_n$$

$$860 = 20a_n$$

$$\frac{860}{20} = a_n$$

$$a_n = 43$$

A questão quer saber o 10º termo e para isso temos que encontrar primeiro a razão dessa progressão.

$$a_n = a_1 + (n - 1).r$$

$$43 = 5 + (20 - 1).r$$

$$43 = 5 + 19r$$

$$43 - 5 = 19r$$

$$38 = 19r$$

$$\frac{38}{19} = r$$

$$r = 2$$

Agora vamos calcular o 10º termo.

$$a_{10} = a_1 + 9r$$

$$a_{10} = 5 + 9.2$$

$$a_{10} = 5 + 18$$

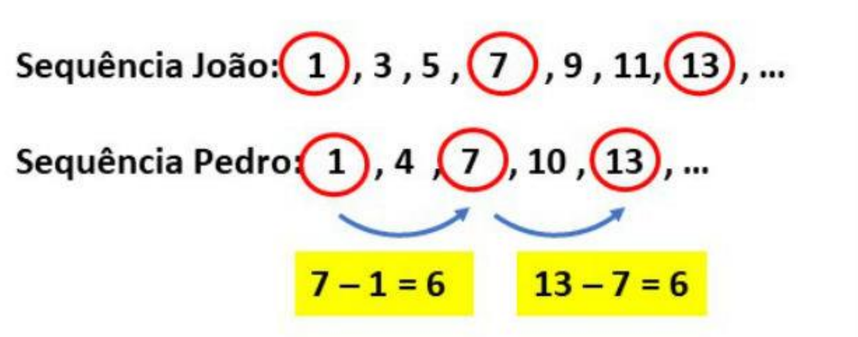
$$a_{10} = 23$$

Portanto o 10º termo é igual a 23. Alternativa D)

(Enem – 2016) Sob a orientação de um mestre de obras, João e Pedro trabalharam na reforma de um edifício. João efetuou reparos na parte hidráulica nos andares 1, 3, 5, 7, e assim sucessivamente, de dois em dois andares. Pedro trabalhou na parte elétrica nos andares 1, 4, 7, 10, e assim sucessivamente, de três em três andares. Coincidentemente, terminaram seus trabalhos no último andar. Na conclusão da reforma, o mestre de obras informou, em seu relatório, o número de andares do edifício. Sabe-se que, ao longo da execução da obra, em exatamente 20 andares, foram realizados reparos nas partes hidráulica e elétrica por João e Pedro. Qual é o número de andares desse edifício?

a) 40
b) 60
c) 100
d) 115
e) 120

Resolução:
Os andares trabalhados por João formam uma P.A., cuja razão é igual a 2. Já os andares que Pedro trabalhou formam uma P.A. de razão igual a 3.
Contudo, temos a informação que em exatamente 20 andares tanto João quanto Pedro trabalharam juntos. Desta maneira, vamos tentar encontrar alguma relação entre esses andares.
Para isso, vamos analisar as duas progressões dadas. No esquema abaixo, marcamos com círculos vermelhos os andares em que ambos trabalharam.



Note que esses andares formam uma nova PA (1, 7, 13, ...), cuja razão é igual a 6 e que possui 20 termos, conforme indicado no enunciado do problema.
Sabemos ainda, que o último andar do prédio faz parte dessa PA, pois o problema informa que eles trabalharam juntos também no último andar. Assim, podemos escrever:

$$a_n = a_1 + (n - 1).r$$
$$a_{20} = 1 + (20 - 1).6$$

$$a_{20} = 1 + 19.6$$

$$a_{20} = 1 + 114$$

$$a_{20} = 115$$

Alternativa: D) 115

Progressão Geométrica (P.G)

Definição: A Progressão Geométrica é uma sequência de números em que cada termo é obtido multiplicando o termo anterior por uma constante fixa (q), chamada de "razão geométrica". Em outras palavras, o número **multiplicado** pela razão (q) estabelecida na sequência, corresponderá ao próximo número.

A fórmula para calcular a razão (q) é simples e pode ser obtida através da divisão entre qualquer termo da PG e seu antecessor:

$$\boldsymbol{q = \frac{a_n}{a_{n-1}}}$$

Exemplo: PG de razão 3 em que o primeiro termo é 2.

- $\boldsymbol{a_1 = 2}$
- $\boldsymbol{a_2 = 2 \, x \, 3 = 6}$
- $\boldsymbol{a_3 = 6 \, x \, 3 = 18}$
- $\boldsymbol{a_4 = 18 \, x \, 3 = 54}$
- $\boldsymbol{a_5 = 54 \, x \, 3 = 162}$

  .
  .
  .
- $\boldsymbol{a_n = a_{n-1} \, x \, 3}$

Classificação de uma P.G: Uma PG pode ser classificada como finita, quando existir uma qualidade limitada de termos, ou infinita. Além disso, também classificamos a PG de acordo com seu comportamento, podendo ser crescente, decrescente, constante e oscilante. Essa classificação depende diretamente da razão q.

- **PG Crescente**: A razão é sempre positiva ($q > 0$) formada por **números crescentes**, por exemplo:

  $(1, 3, 9, 27, 81, \dots)$, onde $q = 3$.

- **PG Decrescente**: A razão é sempre positiva ($q > 0$) e diferente de zero (0) formada por **números decrescentes**. Ou seja, os números da sequência são sempre menores do que seus antecessores, por exemplo:

$$(-1, -3, -9, -27, -81, \ldots) \text{ onde } q = 3$$

- **PG Constante:** A razão é sempre igual a 1 formada pelos mesmos números a, por exemplo:

$$(5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, \ldots) \text{ onde } q = 1$$

- **PG Oscilante:** A razão é negativa ($q < 0$), formada por **números negativos e positivos**, por exemplo:

$$(3, -6, 12, -24{,}48, -96{,}192, -384, 768, \ldots), \text{ onde } q = -2$$

Propriedades da PG:

- **1ª Propriedade:** O <u>produto</u> de termos equidistantes do extremo é sempre igual.

$$(2, 8, 32, 128, 512, 2048)$$

$$2 \cdot 2048 = 4096$$

$$8 \cdot 512 = 4096$$

$$32 \cdot 128 = 4096$$

Quando a PG possui uma quantidade ímpar de termos, há um **termo central**. Esse termo ao quadrado também é igual ao produto dos termos equidistantes.

$$(1, 2, 4, \mathbf{8}, 16, 32, 64)$$

$$1 \cdot 64 = 64$$

$$2 \cdot 32 = 64$$

$$4 \cdot 16 = 64$$

$$8 \cdot 8 = 64$$

- **2ª Propriedade:** O termo central da PG é também a sua média geométrica.

$$\sqrt[7]{1 . 2 . 4 . 8 . 16 . 32 . 64}$$
$$= \sqrt[7]{2097152}$$
$$= 8$$

Fórmula do Termo Geral: Para encontrar qualquer elemento da PG, utiliza-se a expressão:

$$\boldsymbol{a_n = a_1 . q^{(n-1)}}$$

Onde:

$\boldsymbol{a_n}$: número que queremos obter

$\boldsymbol{a_1}$: o primeiro número da sequência

$\boldsymbol{q^{(n-1)}}$**:** razão elevada ao número que queremos obter, menos 1

Exemplo: Qual o 20º termo de uma PG de razão $q = 2$ e número inicial 2?

$$a_{20} = 2 . 2^{(20-1)}$$

$$a_{20} = 2 . 2^{19}$$

$$a_{20} = 2 . 524.288$$

$$a_{20} = 1048576$$

Soma dos Termos Gerais: Para calcular a soma dos números presentes numa PG, utiliza-se a seguinte fórmula:

$$\boldsymbol{S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}}$$

Exemplo: A soma dos 10 primeiros termos da seguinte PG (1, 2, 4, 8, 16, 32, ...)

$$S_{10} = \frac{1(2^{10} - 1)}{10 - 1}$$

$$S_{10} = 1.023$$

Exercícios Resolvidos:

01- (PUC/RJ – 2017) Os termos da soma S = 4 + 8 + 16 + ... + 2048 estão em progressão geométrica. Assinale o valor de S.

a) 4092
b) 4100
c) 8192
d) 65536
e) 196883

Para encontrar o valor, aplicaremos a fórmula da soma finita dos termos de uma PG, ou seja:

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

Identificamos que $a_1 = 4$ e $q = 2$. Entretanto, precisamos descobrir o valor de n, ou seja, quantos termos formam essa PG. Para isso, utilizaremos a fórmula do termo geral da PG:

$$\boldsymbol{a_n = a_1 \, . \, q^{(n-1)}}$$
$$2048 = 4 \, . \, 2^{n-1}$$

$$\frac{2048}{4} = \frac{2^n}{2}$$

$$2^n = 1024$$

$$2^n = 2^{10}$$

$$n = 10$$

Agora que já temos todos os valores necessários, vamos calcular a soma:

$$S_{10} = \frac{4(2^{10} - 1)}{2 - 1}$$

$$S_{10} = 4(1024 - 1)$$

$$S_{10} = 4 \,.\, 1023$$

$$S_{10} = 4092$$

Alternativa a) 4092

02- Uma progressão geométrica possui o primeiro termo igual a 5 e razão igual a 3. O 6º termo dessa progressão é:

a) 60
b) 243
c) 405
d) 1215
e) 3645

Para calcular o 6º termo da sequência, temos que:

$$a_n = a_1 \,.\, q^{(n-1)}$$

Como $n = 6$, $q = 3$ e $a_1 = 5$, substituiremos os valores conhecidos na fórmula:

$$a_6 = 5 \,.\, 3^5$$

$$a_6 = 5 \,.\, 243$$

$$a_6 = 1215$$

Alternativa d) 1215

Exercícios:

Questão 1- (Enem 2010) Ronaldo é um garoto que adora brincar com números. Numa dessas brincadeiras, empilhou caixas numeradas de acordo com a sequência conforme mostrada no esquema a seguir.

			1			
		1	2	1		
	1	2	3	2	1	
1	2	3	4	3	2	1
			...			

Ele percebeu que a soma dos números em cada linha tinha uma propriedade e que, por meio dessa propriedade, era possível prever a soma de qualquer linha posterior às já construídas. A partir dessa propriedade, qual será a soma da 9ª linha da sequência de caixas empilhadas por Ronaldo?

a) 9
b) 45
c) 64
d) 81
e) 285

Questão 2 - (Enem – 2013) As projeções para a produção de arroz no período de 2012 - 2021, em uma determinada região produtora, apontam para uma perspectiva de crescimento constante da produção anual. O quadro apresenta a quantidade de arroz, em toneladas, que será produzida nos primeiros anos desse período, de acordo com essa projeção.

Ano	Projeção da produção (t)
2012	50,25
2013	51,50
2014	52,75
2015	54,00

A quantidade total de arroz, em toneladas, que deverá ser produzida no período de 2012 a 2021 será de

a) 497,25
b) 500,85
c) 502,87

d) 558,75
e) 563,25

Questão 3 - (Enem 2021) No Brasil, o tempo necessário para um estudante realizar sua formação até a diplomação em um curso superior, considerando os 9 anos de ensino fundamental, os 3 anos do ensino médio e os 4 anos de graduação (tempo médio), é de 16 anos. No entanto, a realidade dos brasileiros mostra que o tempo médio de estudo de pessoas acima de 14 anos é ainda muito pequeno, conforme apresentado na tabela.

Tempo médio de estudo de pessoas acima de 14 anos

Ano da Pesquisa	1995	1999	2003	2007
Tempo de estudo (em ano)	5,2	5,8	6,4	7,0

Disponível em: www.ibge.gov.br. Acesso em: 19 dez. 2012 (adaptado).

Considere que o incremento no tempo de estudo, a cada período, para essas pessoas, se mantenha constante até o ano 2050, e que se pretenda chegar ao patamar de 70% do tempo necessário à obtenção do curso superior dado anteriormente.
O ano em que o tempo médio de estudo de pessoas acima de 14 anos atingirá o percentual pretendido será

a) 2018
b) 2023
c) 2031
d) 2035
e) 2043

Questão 4 – (Unicamp – 2015) Se $(a_1, a_2, \ldots, a_{13})$ é uma progressão aritmética (PA) cuja soma dos termos é igual a 78, então a_7 é igual a:

a) 6
b) 7
c) 8
d) 9

Questão 5 - Sendo $x - 3, x, x + 6$ três termos consecutivos de uma P.G., calcule o valor de x e escreva a PG.

Questão 6 - (Unilasalle-RS) O novo site de uma empresa foi inaugurado no primeiro dia do mês de dezembro e recebeu 3 acessos. No segundo dia teve 9 acessos, no terceiro dia, 27 acessos, e assim por diante. Em que dia de dezembro obteve 2187 acessos?

a) 6
b) 7

c) 8
d) 9
e) 10

Questão 7 - (Fauel) Em uma fábrica de automóveis foram produzidos 200 carros no mês de fevereiro. Em junho do mesmo ano, foram produzidos 3.200 carros. Sendo que a quantidade de carros produzidos entre fevereiro e junho formam uma progressão geométrica crescente, a produção de carros no mês de abril desse mesmo ano foi de:

a) 1200
b) 1000
c) 900
d) 800

Questão 8 - (Unesp – 2012) O artigo "Uma estrada, muitas florestas" relata parte do trabalho de reflorestamento necessário após a construção do trecho sul do Rodoanel da cidade de São Paulo. O engenheiro agrônomo Maycon de Oliveira mostra uma das árvores, um fumo-bravo, que ele e sua equipe plantaram em novembro de 2009. Nesse tempo, a árvore cresceu – está com quase 2,5 metros –, floresceu, frutificou e lançou sementes que germinaram e formaram descendentes [...] perto da árvore principal. O fumo-bravo [...] é uma espécie de árvore pioneira, que cresce rapidamente, fazendo sombra para as espécies de árvores de crescimento mais lento, mas de vida mais longa.

(Pesquisa FAPESP, janeiro de 2012. Adaptado.)

Considerando que a referida árvore foi plantada em 1.º de novembro de 2009 com uma altura de 1 dm e que em 31 de outubro de 2011 sua altura era de 2,5 m e admitindo ainda que suas alturas, ao final de cada ano de plantio, nesta fase de crescimento, formem uma progressão geométrica, a razão deste crescimento, no período de dois anos, foi de:

a) 0,5
b) $5 \times 10^{-1/2}$
c) 5
d) $5 \times 10^{1/2}$
e) 50

Questão 9 - (UERJ – 2012) Uma das consequências do acidente nuclear ocorrido no Japão em março de 2011 foi o vazamento de isótopos radioativos que podem aumentar a incidência de certos tumores glandulares. Para minimizar essa probabilidade, foram prescritas pastilhas de iodeto de potássio à população mais atingida pela radiação.

A meia-vida é o parâmetro que indica o tempo necessário para que a massa de uma certa quantidade de radioisótopos se reduza à metade de seu valor.
Considere uma amostra de $_{53}I^{133}$, produzido no acidente nuclear, com massa igual a 2 g e meia-vida de 20 h.
Após 100 horas, a massa dessa amostra, em miligramas, será cerca de:

a) 62,5
b) 125
c) 250
d) 500